

---

# Wiskunde D: domein Analytische Meetkunde

*Dit is een voorlopige domeinbeschrijving voor de module Analytische Meetkunde in Wiskunde D VWO ten behoeve van de experimenten in 2006/2007.*

*Document versie 12 oktober 2006.*

*De cTWO-werkgroep voor dit domein bestaat uit: Aad Goddijn, Lia van Asselt, Dick Klingens.*

## 1. Inleiding: relevantie, situatie, keuzes

Analytische meetkunde is lang weggeweest in de bovenbouw VWO. Een herinvoering is nodig, zeker voor leerlingen die op academisch niveau verder gaan in science of techniek. Ze moeten weten dat zowel in de wiskunde zelf als in de toepassingen ervan aan problemen met een meetkundig karakter vooral met analytische technieken gewerkt wordt.

Analytische Meetkunde Wiskunde D moet goed passen bij de Voortgezette Meetkunde van Wiskunde B. Die concentreert zich deels op bewijzen binnen een deelgebied van de traditionele Euclidische meetkunde maar bevat ook een onderdeel rond Conflictlijnen (door afstandsgelijkheden gedefinieerde figuren) waarvan parabool, ellips en hyperbool belangrijke voorbeelden zijn.

Gebruik van algebraïsche vaardigheden is cruciaal bij dit vakgebied. In de huidige situatie ligt daar een levensgroot probleem! Meetkunde, bewijzen en algebra in mooie samenhang, dat is waar we graag naar toe willen. De Analytische Meetkunde kan een krachtige rol vervullen bij het verder ontwikkelen van algebraïsche vaardigheden en vormt, omdat hier de algebra zeker in een betekenisvolle situatie wordt gebruikt een realisatie op hoog niveau van wat het Visie Rapport van de cTWO beoogt:

Het omgaan met algebraïsche formules en expressies is een vaardigheid waaraan denkactiviteiten ten grondslag liggen. Het gericht omvormen van formules vraagt om inzicht in de structuur van de formule en om overzicht op het te volgen oplossingsproces. Daarnaast dient de leerling over handmatige vaardigheden te beschikken om deze processen correct uit te voeren.

Overladenheid van het programma is gevaarlijk voor de diepgang. Gezien de beschikbare tijd moet daarom gekozen worden voor aanbieden van een beperkt aantal nieuwe technieken. Bij de keuzes voor diverse onderdelen of weglaten daarvan is vooral het diepgang / overladenheid contrast doorslaggevend geweest.

Noot over de term Analytische Meetkunde

*Analytische methoden in de meetkunde* omschrijft het beste wat we nastreven: bij meetkundige onderzoek gebruik maken van variabelen waarmee gerekend wordt met de middelen van de algebra en de analyse.

*Analytische meetkunde* is traditioneel alleen het gebruik van algebra in combinatie met en (meestal) orthonormale coördinaten, waarbij de exploratie van de gelijkwaardigheid van figuur en vergelijking centraal staat. *Analytische methoden* is dus wat ruimer.

Om de herkenbaarheid te behouden voeren in wiskunde D wél de term *Analytische meetkunde* maar feitelijk is het kopje *Analytische methoden in de meetkunde* adequater.

In een apart document op de site wordt ingegaan op de voor het vak belangrijke historische achtergronden achter het begrippenpaar analytisch/synthetisch in relatie met meetkunde.

Zie 'Wat is Analytische Meetkunde?' en de notitie over *La Geometrie* van Descartes.

## 2. Te veronderstellen voorkennis

Nog niet vast staat hoe het vak in de school wordt gepositioneerd: vanaf de vierde klas, in deel-modules, pas later. Voor elke van de drie is wat te zeggen. De keuze om het vak mede te gebruiken voor betekenisvolle ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden is een argument voor vroeg beginnen. De praktische schoolsituatie kan vragen om modulering (naast een andere gemoduleerd keuzevak zoals NLT) Kiezen voor een aangesloten intensief blok betekent laat in het curriculum programmeren. Een mogelijke modulering wordt verderop in dit document aangegeven.

Toch willen we aangeven wat voor voorkennis nodig is, opdat deze niet opgevat wordt als onderdeel van het wiskunde D gebied Analytische meetkunde.

Voorkennis: het is een relatief begrip. Het is goed om op school aan leerlingen te kunnen aangeven wat er van je verwacht wordt als je dit vak kiest, het is niet goed te denken dat de voorkennis geen verdiepingsslag nodig heeft binnen het vak zelf. Sommige onderdelen zijn in ieder geval in klas 4 nog niet aan bod geweest, dus gefaseerde voorkennis wordt het in ieder geval!

### **A. Voorkennis onderdelen van de elementaire meetkunde.**

(Een deel van deze onderdelen wordt in de onderbouw vrijwel alleen intuïtief verkend. Ze zijn nodig voor een goed inzicht in de formelere analytische meetkunde

- [1] Verhoudingsrekenen in verband met *gelijkvormigheid*
- [2] De stelling van Pythagoras en de omkering ervan.
- [3] Hoeken
  - van figuren
  - als hellingshoek
  - hoekensom van de driehoek.
  - F- en Z-hoeken.
- [4] sin, cos, tan als verhoudingen in een rechthoekige driehoek en als functie.
- [5] Beschrijving en elementaire eigenschappen van driehoek, rechthoek, ruit, vierkant, parallellogram.
- [6] Beschrijving en elementaire eigenschappen van de cirkel. Straal, raaklijn en hun onderlinge loodrechte stand; omtrek- en oppervlakteformules.
- [7] Middellood- en deellijn in samenhang met het *spiegelbegrip*.
- [8] Ruimtelijke begrippen als kubus, balk, bol.
- [9] Samenhang tussen aanzichten en doorsneden van objecten.

### **B. Voorkennis onderdelen van de synthetische voortgezette meetkunde in wiskunde B**

(Van een aantal van deze dingen zal in het begin van de vierde klas niet direct gebruik gemaakt kunnen worden.)

- [10] De stelling van Thales.
- [11] Begrippen uit het 'logische deel' van de meetkunde zoals *bewijs, gegevens, tegenvoorbeeld, omkering, gelijkwaardigheid van beweringen*.
- [12] Kennis van conflictlijnen, in het bijzonder die tussen lijnen, punten en cirkels.
- [13] Raaklijneigenschappen bij parabool, ellips en hyperbool.

---

**C. Voorkennis coördinaten als plaatsaanduiders**

- [14] Onderscheid tussen grafiek (met mogelijk verschillende soorten assen) en cartesisch coördinatenstelsel.
- [15] Assen, oorsprong, kwadrant.
- [16] Weten dat grafiek van  $y = ax + b$  een rechte lijn is; helling en richtingscoëfficiënt. Ook beweringen als 'x = 5' kunnen interpreteren als 'rechte lijn'.
- [17] Pythagoras als middel om *afstanden* te berekenen, ook in de ruimte; de cirkelvergelijking als toepassing van de stelling van Pythagoras.

**D. Voorkennis algebra en grafieken**

- [18] Omwerken van allerlei algebraïsche vormen naar equivalenten vormen; ook met breuken en met gebruikmaking en begrip van de bijhorende regels.
- [19] Lineaire vergelijking oplossen in alle vormen, ook met parameters als coëfficiënten.
- [20] Parate kennis hebben over  $(a+b)^2$ ,  $(a-b)^2$ ,  $a^2 - b^2$  en deze kennis kunnen inzetten in eenvoudige redeneringen.
- [21] Twee vergelijkingen met twee onbekenden oplossen, ook weten wat gedaan moet worden als er een parameter in voorkomt.
- [22] Tweedegraads functies:
  - nulpunten, top en as kunnen bepalen
  - kwadraat afsplitsen
  - uitdelen naar een eerste graadsterm, ook met rest.
  - begrijpen dat een tweedegraadsfunctie in de vormen  $ax^2 + bx + c$ ,  $a(x - d)^2 + e$ ,  $a(x - f)(x - g)$  kan verschijnen en weten wat aan de verschillende vormen kan worden afgelezen.
- [23] Formules voor een variabele of constante in een andere formule kunnen substitueren.
- [24] Schuiven, spiegelen, vermenigvuldigen vanuit de assen van grafiek in verband kunnen brengen met aanpassingen in de vergelijking  $y = f(x)$ .
- [25] Eenvoudige bewijzen kunnen leveren met behulp van algebra.

**E. Voorkennis analyse (alleen in later stadium vóóronderstellen; aansluiting bij Wiskunde B)**

- [26] Verband en onderscheid hanteren tussen de begrippen differentie-quotiënt en afgeleide; verband tussen afgeleide en helling gebruiken.
- [27] Afgeleide van veelterm-, wortelfuncties en goniometrische functies bepalen.
- [28] Ketting-, product- en quotiëntregel hanteren bij bepaling van afgeleide functies.
- [29] Maxima en minima kunnen bepalen, ook in eenvoudige meetkundige situaties.
- [30] Begrip hebben voor limieten, waarbij de variabele tot nul of tot oneindig nadert.
- [31] Horizontale en verticale asymptoten herkennen bij gegeven functies.

### 3. Inhoudelijke beschrijving van het domein

In de volgende subdomeinen wordt in details beschreven wat de leerling uiteindelijk kan.

#### A. *Algemene inzichten in de aard van de analytische meetkunde*

- [1] De methode van de Analytische meetkunde beschrijven; daarbij aangeven wat de synthetische en de analytische benadering in de wiskunde van elkaar onderscheidt en hoe deze samenwerken
- [2] Kennis en inzicht tonen betreffende de historische achtergrond van de Analytische Meetkunde.
- [3] Essentiële methoden van de analytische meetkunde gebruiken bij het onderzoeken van meetkundige figuren en hun onderlinge ligging, verandering en beweging en bij het toepassen hiervan in concrete situaties.
- [4] Gemotiveerd kiezen uit algebraïsche technieken die bij de Analytische meetkunde van belang zijn en deze adequaat en ondersteund door inzicht uitvoeren met pen en papier en/of daartoe geschikte software; dit alles om de gemodelleerde probleemsituatie te kunnen onderzoeken.

#### B. *Coördinaten, vergelijkingen en figuren, punten in twee dimensies*

- [5] Het verband tussen figuur en vergelijking kennen en kunnen gebruiken: coördinaten van punten op de figuur voldoen aan de vergelijking en andersom.
- [6] Eenvoudige eigenschappen zoals symmetrieën ten opzichte van de coördinaatassen in de vergelijking van een figuur herkennen.
- [7] Een probleem-adequaat coördinaatsysteem kiezen; qua ligging en aard aansluitend bij een gegeven meetkundig probleem.
- [8] Relaties tussen de variabelen en constanten in het probleem vastleggen middels vergelijkingen.
- [9] Bij een door vergelijking(en) bepaalde figuur de vergelijking(en) bepalen van de verschoven, gespiegelde of in één of meer asrichtingen opgerekte figuur.

#### C. *Lijnen in het vlak*

- [10] Verschillende analytische voorstellingen van een rechte lijn in het platte vlak hanteren en met elkaar in verband brengen.  
Als vergelijking:
  - bij gegeven punt op de lijn en gegeven richting
  - door twee gegeven punten
  - als conflictlijn of middelloodlijn van twee punten
  - als asvergelijking in het speciale geval van gegeven snijpunten met  $x$  en  $y$ -as.Met een parametervoorstelling door beschrijvingen van de verschillende coördinaten apart.
- [11] Op grond van hun vergelijkingen vaststellen of twee lijnen
  - elkaar snijden
  - evenwijdig lopen
  - samenvallen.
  - elkaar loodrecht snijden.
- [12] Vergelijkingen opstellen van lijnen door een gegeven punt loodrecht op of even-

---

wijdig aan een door een vergelijking gegeven lijn.

- [13] Afstand van een punt tot een lijn bepalen vanuit een analytische voorstelling van een lijn.

#### **D. Cirkel, kegelsneden en vergelijkingen**

- [14] Vergelijking van de cirkel opstellen:
- als meetkundige plaats, vaste afstand tot een middenpunt.
  - als baan van een roterend punt met een parameter voorstelling
- [15] In geschikte coördinaten de standaardvergelijkingen opstellen voor parabool, ellips en hyperbool; dit vanuit de definities van deze figuren als verzameling punten met een gegeven afstandsrelatie.
- [16] Van eerste- en tweedegraadsvergelijkingen (zonder kruisterm) de aard en ligging van de bijhorende figuur bepalen en daarbij aangeven voor zover van toepassing:
- asrichtingen en aslengtes straal, middelpunt,
  - brandpunt(en), asymptoten
  - snijding met de coördinaatassen
  - toppen
- [17] Raaklijnen aan een tweedegraads kromme bepalen door een gegeven punt op de kromme bijvoorbeeld met behulp van de discriminant van een vierkantsvergelijking.
- [18] Raaklijnen aan kegelsneden opstellen als die door standaardvergelijkingen zijn gegeven.
- [19] Door een vergelijking gegeven figuren schetsen en puntsgewijs tekenen. [Er is een apart subdomein analytische meetkunde en ICT, dat hier mee verbonden is]

#### **E. Parametrisering**

- [20] Een punt, waarvan de coördinaten beschreven zijn door functies van een variabele (de parameter) interpreteren als punt dat een baan beschrijft.
- [21] Bij een door een beweging beschreven figuur een geschikt gekozen parameter gebruiken om de beweging te beschrijven. Deze parameter kan zijn
- een variabele die de reële getallen (of een deel daarvan) doorloopt (bijvoorbeeld bij een parameter voorstelling van een lijn)
  - een hoek, bij draaiende en periodieke bewegingen (bijvoorbeeld bij de cirkelbeweging zelf met sinus en cosinus)
  - combinaties van beide bij draaiing en verplaatsing: bijvoorbeeld de cycloïde en andere afwikkelingskrommen.
- [22] Met behulp van parameter voorstelling eenvoudige problemen kunnen oplossen.
- [23] Inzien dat een vergelijking van een kromme een middel is om te toetsen of een punt op een figuur ligt, en dat een parameter voorstelling alle punten van de figuur voortbrengt op een berekenbare manier; verband leggen met de termen meetkundige plaats en baan.
- [24] In hanteerbare gevallen een parameter voorstelling aangeven van een bewegend punt op een middels coördinaatvergelijking gegeven kromme en met behulp van deze parametrisering vragen over de krommen beantwoorden.
- [25] In hanteerbare gevallen vanuit een parameter voorstelling een vergelijking van een

kromme bepalen.

- [26] Een grafiek van een functie herkennen als een parametervoorstelling van een figuur.

#### **F. De ruimte**

- [27] De beschrijving van punten in de ruimte met drie coördinaten hanteren in voorkomende toepassingen
- [28] De vergelijking van een bol met gegeven straal en middelpunt opstellen.
- [29] Bij een middels een  $x$ ,  $y$ - vergelijking gegeven figuur een vergelijking opstellen voor het omwentelingsoppervlak dat ontstaat bij draaiing om een van de assen.
- [30] Met behulp van software figuren genereren bij verbanden als  $z = f(x,y)$  en hierbij adequate verbanden leggen tussen beeld en formule.

#### **G. Raaklijnen en verbanden met de analyse**

- [31] Het verband tussen de algebraïsche benadering van het raaklijnbegrip en het raaklijnbegrip uit de differentiaalrekening begrijpen en beschrijven.
- [32] In geschikte gevallen via de differentiaalrekening de raaklijn aan een kromme vaststellen vanuit de (impliciete) vergelijking in  $x$  en  $y$  met behulp van o.a. de kettingregel.

#### **H. Analytische meetkunde en ITC**

Bij adequate software kan hier gedacht worden aan o.a. *Cabri II (plus)*, *Sketchpad*, *Cinderella*, *Geogebra*, *Cabri 3D*, *Mathematical Visualisation Toolkit*, *WinPlot*, *Geocadabra* en eventueel *CAD-Cam* programma's.

- [33] Geschikte software gebruiken waarin algebraïsche invoer gegeven kan worden om een figuur te laten tekenen. Onder andere:
- het plotten van een kromme op grond van een impliciete vergelijking
  - het plotten van een kromme op grond van een parametrisering
  - het teken van een oppervlak bij verbanden als  $z = f(x,y)$ .
- Hierbij adequate verbanden leggen tussen beeld en formule.
- [34] Exploratief met de mogelijkheden van geschikte software om gaan om bewijzen in de analytische meetkunde op te bouwen en te begrijpen.

#### **I. Toepassingen voor zelfstandig onderzoek en keuze onderwerpen**

- [35] Met behulp van de technieken van de analytische meetkunde zelfstandig een verdergaande toepassing van de analytische meetkunde verkennen aan de hand van geschikte literatuur en andere bronnen.
- Bijvoorbeeld:
- Draaiingen in het vlak
  - Coördinaten in hogere dimensies (hyperkubus, meer dimensionale bol, snijden met lagerdimensionale ruimten).
  - Bezierkrommes en splines zoals gebruikt in animatiefilms.
  - Convexiteit
  - Tweedegraads oppervlakken in de architectuur van de stad.
  - Krommen met parameterbeschrijving, die gebaseerd is op de manier waarop de kromme door een bewegend punt wordt genereerd; bijvoorbeeld voor

- 
- schroeflijnen op een cilinder, kegel en torus.
  - Vergelijkingen van kegelsneden bepalen op de manier van Apollonius vanuit het snijden van een kegel.
  - Via de stelling van Dandelin het verband leggen tussen kegelsnede en conflictlijn.
  - Kegelsneden beschrijven met richtlijn en excentriciteit.
  - Kegelsnede beschrijven met behulp van poolcoördinaten.
  - Verkennen van het begrip poollijn bij kegelsneden
  - Pythagoreïsche drietallen bepalen via het snijden van de eenheidskring met lijnen door het punt  $(-1,0)$ .
  - Verkennen van meetkunde met behulp van vectoren.

## 4. Te beheersen (algebraïsche) technieken

Het is niet de bedoeling dat deze technieken als aparte onderwerpen worden opgevat; ze worden juist geïntegreerd in de meetkunde beoefend, dat is immers het kenmerk van de Analytische Meetkunde. De hier aangegeven technieken zijn speciaal bij de Analytische meetkunde noodzakelijk zijn.

- [1] In een gegeven probleemsituatie een keuze maken voor benoeming van variabelen en constanten in het probleem met letters en getallen.
- [2] Snijden van figuren interpreteren als oplossen van een stelsel vergelijkingen
- [3] In het geval van snijden van lijnen onderling, van cirkels onderling en van snijden van lijn en kegelsnede de berekening expliciet uitvoeren, ook als een extra parameter aanwezig is.
- [4] In het geval dat een lijn door een gegeven punt van een ander figuur gaat, de snijvergelijking bepalen en het uitdelen uitvoeren van de factor die met het al gegeven punt te maken heeft.
- [5] Op grond van de stelling dat een vergelijking in één onbekende nooit meer oplossingen dan de graad heeft, voorspellingen doen over aantallen snijpunten van figuren.
- [6] Redeneren met samenhangen tussen aantal variabelen, graad van (algebraïsche vergelijkingen), aantal vergelijkingen en mogelijke dimensie van de oplossingsverzameling.
- [7] Een parameter uit vergelijkingen *eliminieren*; volgens de basistechniek van vrijmaken uit de eerste en *substitueren* in de andere vergelijking(en) en in voorkomende gevallen op andere manieren, bijvoorbeeld door vrijmaken van een *sinus* en *cosinus* en eliminieren met behulp van Pythagoras.

## 5. Omvang en plaatsing in het programma, modulaire indeling

Een spreiding van de leerlijn Analytische Meetkunde over klas 4, 5 en 6 heeft de voorkeur, omdat dan de algebraïsche vaardigheden die in de 1<sup>e</sup> tot en met 3<sup>e</sup> klas zijn verworven, kunnen worden gebruikt en uitgebouwd.

Een modulering is goed mogelijk. De eenvoudigste is die waarin de diverse sub-domeinen in volgorde worden ondernomen. Dat kan echter niet optimaal zijn, omdat elementen uit diverse sub-domeinen op diverse punten met de andere domeinen verweven zijn en sommige sub-domeinen een constante onderliggende lijn beschrijven. Denk aan gebruik van vergelijking en coördinaten, aan parametrisering, aan gebruik van algebra.

Niettemin wordt hier een schatting voor de sub-domeinen voorgesteld als onderdeel van de beschikbare 80 uur.

Onderwerpen die (impliciet of expliciet) ook in andere onderwerpen verweven zijn, krijgen dus afzonderlijk in deze tabel minder tijd toebedeeld, maar komen wel in de andere onderwerpen aan bod. De aangegeven tijden geven dus ruimte om expliciet over het onderwerp te spreken. Dat is ook het geval voor het in de tabel opgenomen item Algebra. In de subdomeinbeschrijving is algebra vooral opgenomen in de vorm van te beoefenen vaardigheden; maar bij algebra op dit niveau dient er ook ruimte te zijn om de algebraïsche technieken zelf als expliciet onderwerp aan bod te laten komen. Maar dan wel in een analytisch-meetkundige context!

Voor subdomein I kan geput worden uit de uren in de domeinen keuzeonderwerp en wiskunde in de wetenschap.

<b>Verdeelschets 80 uren Analytische meetkunde</b>			
<i>sub-domein</i>		<i>omvang</i>	<i>kan in klas</i>
<b>A</b>	<b>Algemene inzichten in de aard van de analytische meetkunde</b>	<b>doorlopend</b>	
<b>B</b>	<b>Coördinaten, vergelijkingen en figuren, punten in twee dimensies</b>	<b>6</b>	<b>4</b>
<b>C</b>	<b>Lijnen in het vlak</b>	<b>10</b>	<b>4</b>
<b>D</b>	<b>Cirkel, kegelsneden en vergelijkingen</b>	<b>10</b>	<b>4 (cirkel) en 5</b>
<b>E</b>	<b>Parametrisering</b>	<b>10</b>	<b>doorlopend</b>
<b>F</b>	<b>De ruimte</b>	<b>8</b>	<b>5</b>
<b>G</b>	<b>Raaklijnen en verbanden met de analyse</b>	<b>8</b>	<b>5</b>
<b>H</b>	<b>Analytische meetkunde met ICT</b>	<b>8</b>	<b>doorlopend</b>
<b>I</b>	<b>Toepassingen en keuzeonderwerpen</b>	<b>10 (...)</b>	<b>6</b>
<b>Algebra</b>		<b>10</b>	<b>doorlopend</b>